TEORIJA SIGNALA I INFORMACIJA

Studijski program: Primijenjeno računarstvo

III termin

Dr Nevena Radović

Odziv sistema

- Ukupni odziv= Sopstveni odziv + Prinudni odziv
- Sopstveni odziv (zero-inpult response) zavisi od početnih uslova sistema u t=0; definisan na prethodnom predavanju.
- Prinudni odziv (zero-state response) zavisi od pobude (ulaza) sistema $f(t)$ za t≥0.
- Ako poznajemo odziv na jediničnu funkciju (Dirac-ov impuls) odnosno ***impulsni odziv***, onda možemo naći odziv na proizvoljnu funkciju.

$$f(t)=\delta(t)\rightarrow y(t)=?$$

Impulsni odziv sistema

- Opis sistema (sistem diferencijalnih jednačina):

$$Q(D)y(t)=P(D)f(t)$$
$$Q(D)=D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\ldots+a_0$$
$$P(D)=b_mD^n+b_{m-1}D^{n-1}+\ldots+b_0$$

- Impulsni odziv $y_\delta(t)\triangleq g(t)$ je u opštem slučaju:

$$g(t)=b_n\delta(t)+[P(D)g_n(t)]h(t),\quad h(t)=\begin{cases}1,t\geq 0\\ 0,t<0\end{cases}$$

- Pri tome je $g_n(t)$ je linearna kombinacija karakterističnih modova sistema, uz početne uslove:

$$g_n^{(n-1)}(0)=1,\ \ g_n(0)=g_n^1(0)=\ldots=g_n^{(n-2)}(0)\equiv 0$$

- Napomena: Ako je $m<n$ tada je b_n=0, pa nema impulsnog člana.

Impulsni odziv sistema

- Primjer: Odrediti impulsni odziv sistema opisanog jednačinom:

$$(D^2+3D+2)y(t)=Df(t)$$

- Rješenje:

Impulsni odziv je definisan: $g(t)=b_n\delta(t)+[P(D)g_n(t)]h(t)$

Očigledno, n=2, pa je u našem slučaju je b_n=b_2=0, jer je $m<n$, odnosno $P(D)=D$.

Karakteristična jednačina ovog sistema je:

$$\chi^2+3\chi+2=0\Rightarrow\chi_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\chi_1=-1,\chi_2=-2$$

gdje su λ_1 i λ_2 karakteristične vrijednosti. Dakle,

$$g_n(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$$

Impulsni odziv sistema

- Pošto je *n*=2, zaključujemo da su početni uslovi:

$$g_n^1(0) = 1,\ \ g_n(0) = 0$$

pa je:

$$g_n^1(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t} \Rightarrow g_n^1(0) = -C_1 - 2C_2 = 1$$
$$g_n(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} \Rightarrow g_n(0) = C_1 + C_2 = 0$$

- Odnosno:

$-C_1 - 2C_2 = 1$

$C_1 + C_2 = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 1$, a $C_2 = -1$.

- Tada je konačno:

$$g_n(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Impulsni odziv sistema

- Pošto je *P*(*D*)=*D*, tada je:

$$g(t) = D(e^{-t} - e^{-2t})h(t) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})h(t)$$

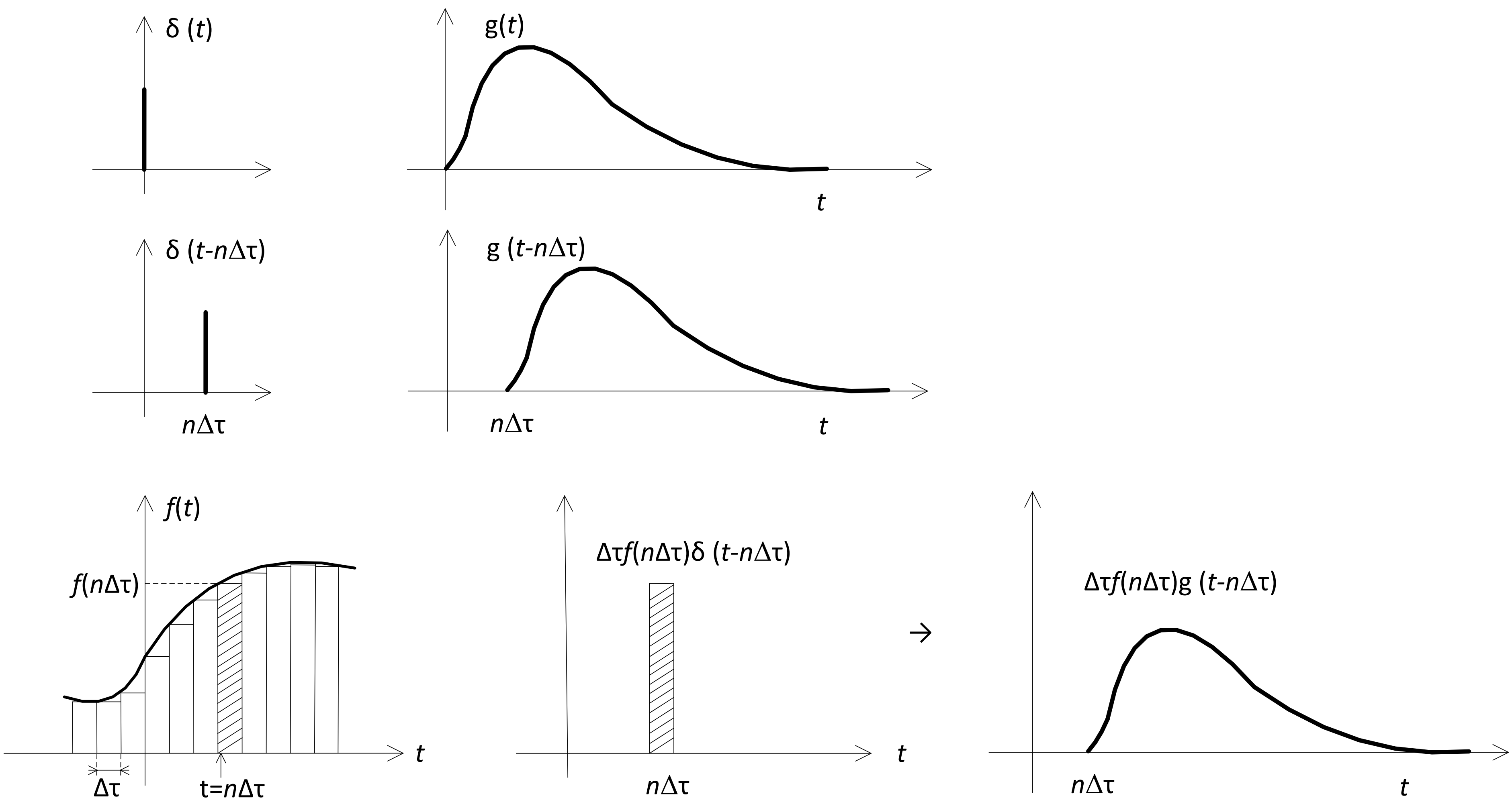
- Odnosno:

$$g(t) = b_n\delta(t) + [P(D)g_n(t)]h(t) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})h(t)$$

Prinudni odziv

- Pretpostavimo da su svi početni uslovi u sistemu jednaki nuli, i da je sistem linearan i vremenski-invarijantan.
- Koristićemo princip superpozicije da bi izveli odziv linearnog sistema na proizvoljnu ulaznu funkciju $f(t)$, odnosno prinudni odziv sistema.
- U tu svrhu predstavimo $f(t)$ preko impulsa, kako bismo iskoristili prethodno definisani impulsni odziv.

Prinudni odziv



Prinudni odziv

- Drugim riječima:

$$\delta(t) \Rightarrow g(t)$$
$$\delta(t - n\Delta\tau) \Rightarrow g(t - n\Delta\tau)$$
$$\underbrace{f\left(n\Delta\tau\right)\Delta\tau\delta(t - n\Delta\tau)}_{pobuda(ulaz)} \Rightarrow \underbrace{f\left(n\Delta\tau\right)\Delta\tau g(t - n\Delta\tau)}_{izlaz}$$

- Zadnja relacija prikazuje odziv na jednu komponentu (impuls) funkcije $f(t)$. Ukupan odziv se dobija kao suma svih ovakvih komponenti:

$$\underbrace{\lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\Delta\tau\right)\delta(t - n\Delta\tau)\Delta\tau}_{f(t)} \Rightarrow \underbrace{\lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\Delta\tau\right)g(t - n\Delta\tau)\Delta\tau}_{y(t)}$$

Prinudni odziv

- Drugim riječima:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau}_{odziv\ na\ pobudu\ f(t)=y(t)}$$

- Dakle, u opštem slučaju je:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = f(t) * g(t)$$

tj. dobili smo prinudni odziv sistema, odnosno izlaz sistema preko impulsnog odziva $g(t)$. Uočimo da je $g(t)$ sačinjen od karakterističnih modova, pa je stoga i prinudni odziv sačinjen od istih.

Konvolucioni integral

- Konvoluciju dvije funkcije (signala) $f_1(t)$ i $f_2(t)$ u opštem slučaju definišemo kao:

$$c(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

- Osobine konvolucije:
  - Komutativnost:

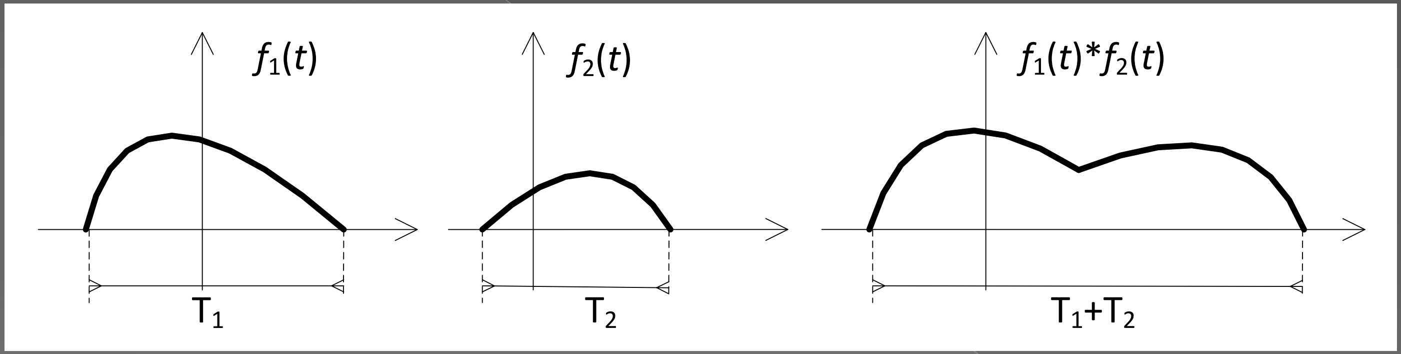
$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

  - Konvolucija sa impulsom:

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \overset{t=\tau}{=} f(t)$$

Konvolucioni integral

- Osobine konvolucije (nastavak):
  - Širina opsega:



  - Odziv i kauzalnost:

    Ako je signal $f(t)$ kauzalni, odnosno ako je $f(t)=0$ za $t<0$, ulaz u kauzalni sistem ($g(t)=0$ za $t<0$, odnosno $g(t-\tau)=0$ za $t-\tau<0$), tada je:

$$y(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

Konvolucioni integral

- Osobine konvolucije (nastavak):
  - Odziv i kauzalnost (nastavak):

  Pošto je $g(t\text{-}\tau)\neq 0$ za $t\text{-}\tau\geq 0$, odnosno $\tau\leq t$ i $f(\tau)\neq 0$ za $\tau\geq 0$ dalje je:

$$y(t)=\begin{cases}\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau, t\geq 0 \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad t<0\end{cases}=\left(\int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)h(t)\Rightarrow kauzalan$$

- U opštem slučaju je onda:

$$f_1(t)h(t)*f_2(t)h(t)=\left(\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right)h(t)$$

Odziv na funkciju e^{st}

- Važna funkcija za linearne, vremensko invarijantne sisteme:

$$e^{st}, -\infty < t < \infty$$

- Ovo je jedina funkcija koja ima tu osobinu da je odziv sistema na pobudu ovog oblika, daje izlaz istog tog oblika. Zato se ova funkcija naziva karakteristična funkcija.

- <u>Dokaz</u>:
  Neka je $f(t)=e^{st}$, a $g(t)$ impulsni odziv. Tada je:

$$y(t)=g(t)*e^{st}=\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau=e^{st}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau}d\tau}_{G(s)}$$

  Napomena: za dato s, $G(s)$ je konstanta.

Odziv na funkciju e^{st}

- Poznato je da za linearni sistem važi:

$$Q(D)y(t) = P(D)f(t)$$

- Stoga se prenosna funkcija sistema definiše kao:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

- <u>Dokaz:</u>
- Neka je ulaz u sistem: $f(t) = e^{st}$. Dokazali smo da je tada odziv: $y(t) = G(s)e^{st}$. Kada uvrstimo u jednačinu kojom je opisan linearni sistem dobijamo:

$$Q(s)G(s)e^{st} = P(s)e^{st} \Rightarrow G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Ukupan odziv sistema

- Nakon definisanja i prinudnog odziva, sada možemo napisati konačno rješenje za ukupan odziv sistema:

Ukupni odziv= Sopstveni odziv + Prinudni odziv

$$y(t) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} C_j e^{\lambda_j t}}_{slobodni\ (sopstveni)\ odziv} + \underbrace{f(t) * g(t)}_{prinudni\ odziv}$$

Primjer:

- Sistem je opisan diferencijalnom jednačinom:

$$y'' + 3y' + 2y = f'$$

odnosno:

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = Df(t)$$

pri čemu je ulaz u sistem: $f(t) = 10e^{-3t}h(t)$. Odrediti ukupan odziv sistema, za početne uslove: $y_0(0) = 0, y_0'(0) = -5$

- <u>Rješenje:</u>
- Na početku časa smo odredili da je impulsni odziv ovog sistema:

$$g(t) = (2e^{-2t} - e^{-t})h(t)$$

- Odziv za nulte početne uslove (prinudni odziv) se dobija kao:

$$y_f(t) = f(t) * g(t) = 10e^{-3t}h(t) * [2e^{-2t} - e^{-t}]h(t) =$$

$$= \left(\int_0^t (2e^{-2\tau} - e^{-\tau}) 10 e^{-3(t-\tau)} d\tau \right) h(t) =$$

Primjer:

$$=10\left(\int_0^t 2e^{-2\tau-3(t-\tau)}d\tau-\int_0^t e^{-\tau-3(t-\tau)}d\tau\right)h(t)=$$

$$=\left(20\int_0^t e^{-3t+\tau}d\tau-10\int_0^t e^{-3t+2\tau}d\tau\right)h(t)=$$

$$=10e^{-3t}\left(2\int_0^t e^{\tau}d\tau-\int_0^t e^{2\tau}d\tau\right)h(t)=$$

$$=10e^{-3t}\left(2e^{\tau}\Big|_0^t-\frac{1}{2}e^{2\tau}\Big|_0^t\right)h(t)=\ldots=(20e^{-2t}-5e^{-t}-15e^{-3t})h(t)$$

- Sada treba naći odziv na nulti ulaz (sopstveni ulaz):

$$\lambda^2+3\lambda+2=0\Rightarrow\lambda_1=-1;\lambda_2=-2$$

Primjer:

- Imajući u vidu zadate početne ulaze, dalje je:

$$y_0(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t} \quad \Rightarrow y_0(0)=C_1+C_2=0$$
$$y_0^{'}(t)=-C_1e^{-t}-2C_2e^{-2t} \quad \Rightarrow y_0^{'}(0)=-C_1-2C_2=-5$$

- Rješavanjem datog sistema jednačina zaključujemo da je C_1=-5 i C_2=5, odnosno da je sopstveni odziv:

$$y_0(t)=-5e^{-t}+5e^{-2t}, t\geq 0$$

- Ukupno rješenje je stoga:

$$y_t(t)=y_0(t)+y_f(t)$$
$$y_t(t)=(-5e^{-t}+5e^{-2t})h(t)+(20e^{-2t}-5e^{-t}-15e^{-3t})h(t)=$$
$$=(-10e^{-t}+25e^{-2t})h(t)+(-15e^{-3t})h(t)$$